Exercice 1

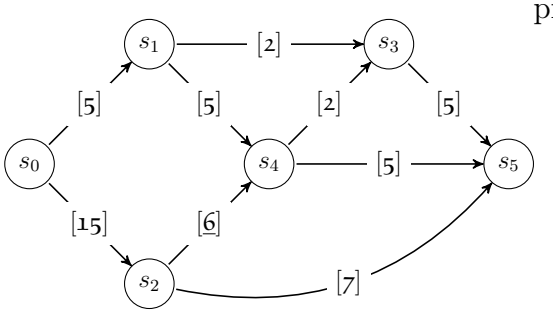


FIGURE 1 – G_1

Les valuations entre crochets des arcs du graphe G_1 représentent des capacités.

1. Déterminer sur le graphe G_1 un flot maximal du sommet s_0 au sommet s_5. Quels arcs du graphe sont saturés ? Quelle est la coupe minimum obtenue par l'algorithme de Ford et Fulkerson ?

Exercice 2

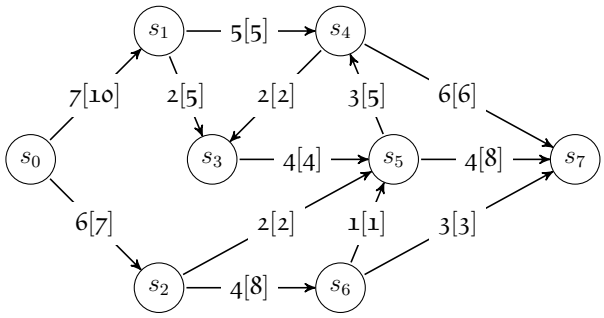


FIGURE 2 – G_2

Les valuations des arcs du graphe G_2 définissent un flot sur un graphe de capacité borné (les capacités des arcs sont indiquées entre crochets).

1. Le flot de s_0 à s_7 est-il maximum ? Si non, l'optimiser.
2. Vous indiquerez une coupe minimum associée au flot maximal obtenu.

Exercice 3

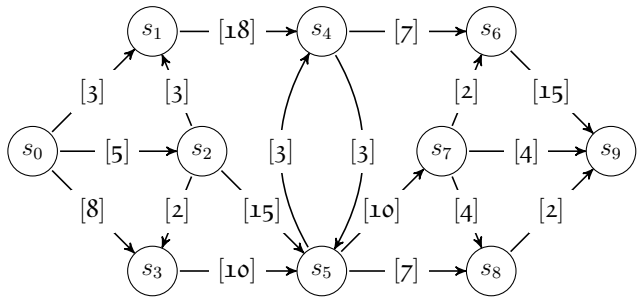


FIGURE 3 – G_3

Dans le graphe G_3 les valuations entre crochets des arcs représentent des capacités.

1. En utilisant l'algorithme de *Ford-Fulkerson*, déterminer sur le graphe G_3 un flot maximum du sommet s_0 au sommet s_9 (vous indiquerez les augmentations successives du flot, et vous mettrez en évidence le fait que le dernier flot obtenu est maximal).

Exercice 4

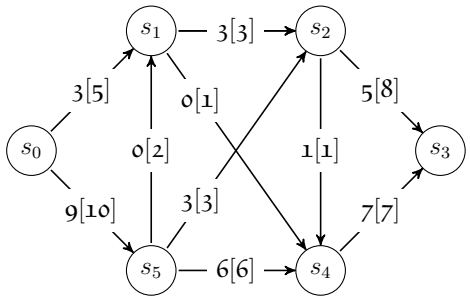


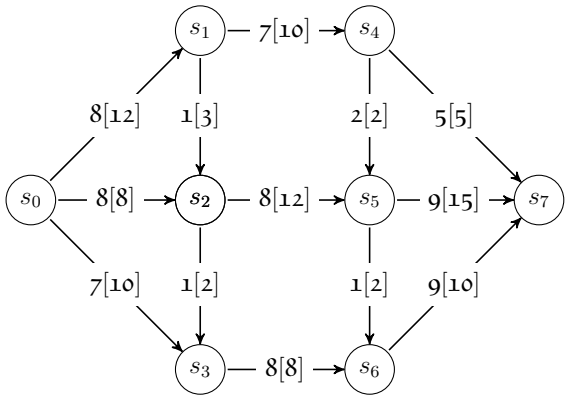
FIGURE 4 – G_4

Dans le graphe G_4 les valuations entre crochets des arcs représentent des capacités.

1. En utilisant l'algorithme de *Ford-Fulkerson*, déterminer sur le graphe G_4 un flot maximum du sommet s_0 au sommet s_3 (vous indiquerez les augmentations successives du flot, et vous mettrez en évidence le fait que le dernier flot obtenu est maximum).

Exercice 5

(*) Les arcs du graphe G_5 sont valués par des nombres entre crochets (représentant leur capacité), et des nombres représentant un flot compatible avec les capacités.

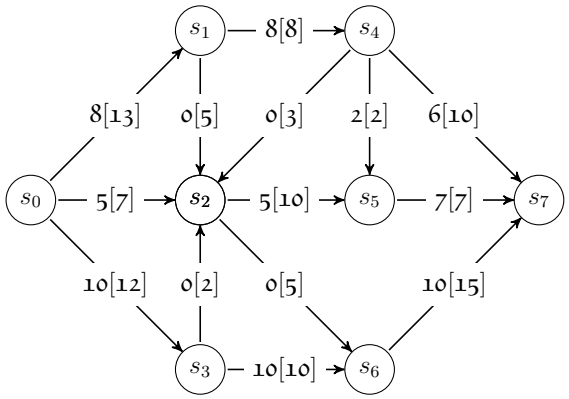


1. Utiliser l'algorithme de *Ford-Fulkerson* pour augmenter le flot indiqué de façon à obtenir un flot maximum allant du sommet s_0 au sommet s_7 (vous montrerez que le flot obtenu est maximum).

FIGURE 5 – G_5

Exercice 6

(*) Les arcs du graphe G_6 sont valués par des nombres entre crochets (représentant leur capacité), et des nombres représentant un flot compatible avec les capacités.



1. En utilisant l'algorithme de *Ford-Fulkerson*, augmenter le flot du sommet s_0 au sommet s_7. Vous ferez apparaître les différentes étapes de l'optimisation, et vous indiquerez une coupe minimum.

FIGURE 6 – G_6

Algorithme de Ford et Fulkerson

G : graphe orienté
$c : E(G) \to \mathbb{R}^+$
s : source de G
t : puit de G

On considère un arc (t, s) de capacité $c(t, s)$ infinie. La valeur du flot sur cet arc sera la "valeur du flot de s à t".

On note respectivement par $I(e)$ et $T(e)$ l'extrémité initiale et l'extrémité terminale d'un arc e.

Algorithme 1 FlotMax(G, c, s, t)

```
pour tout e de E(G) faire
    f[e] ← 0
fin pour
répéter
    Marquage(G, c, f, s, t)
    si t ∈ Y alors
        v ← t
        C⁺ ← {(t, s)}
        C⁻ ← ∅
        tant que v ≠ s faire
            e ← A[v]
            si v = T[e] alors
                C⁺ ← C⁺ ∪ {e}
                v ← I[e]
            sinon
                C⁻ ← C⁻ ∪ {e}
                v ← T[e]
            fin si
        fin tant que
    fin si
    pour tout e ∈ C⁺ faire
        f(e) ← f(e) + δ[t]
    fin pour
    pour tout e ∈ C⁻ faire
        f(e) ← f(e) − δ[t]
    fin pour
jusqu'à t ∉ Y
```

Algorithme 2 Marquage(G, c, f, s, t)

1: $Y \leftarrow \{s\}$
2: $\delta(s) \leftarrow +\infty$
3: $Max \leftarrow$ faux
4: **tant que** $t \notin Y et Max =$faux **faire**
5: **si** il existe $e = (u, v)$ avec $u \in Y, v \notin Y, f(e) < c(e)$ **alors**
6: $Y \leftarrow Y \cup \{v\}$
7: $A[v] \leftarrow e$
8: $\delta[v] \leftarrow min(\delta[u], c(e) - f(e))$
9: **sinon**
10: **si** il existe $e = (u, v)$ avec $v \in Y, u \notin Y, f(e) > 0$ **alors**
11: $Y \leftarrow Y \cup \{u\}$
12: $A[u] \leftarrow e$
13: $\delta[u] \leftarrow min(\delta[v], f(e))$
14: **sinon**
15: Max $\leftarrow vrai$
16: **fin si**
17: **fin si**
18: **fin tant que**

Solutions pour le chargé de TD

En général, pour déterminer un flot maximal en utilisant l'algorithme de *Ford-Fulkerson* le choix des chaînes augmentantes n'est pas unique.

Correction de l'exercice 1

Flot max = Coupe min = 16. Ensemble des sommets de la coupe : $\{s_0, s_1, s_2, s_4\}$, ensemble des arcs saturés : $\{(s_1, s_3), (s_4, s_3), (s_4, s_5), (s_2, s_5)\}$.

Le résultat peut être obtenu en choisissant les chaînes augmentantes suivantes :
$s_0 \longrightarrow s_1 \longrightarrow s_3 \longrightarrow s_5$, augmentation : 2
$s_0 \longrightarrow s_1 \longrightarrow s_4 \longrightarrow s_5$, augmentation : 3
$s_0 \longrightarrow s_2 \longrightarrow s_5$, augmentation : 7
$s_0 \longrightarrow s_2 \longrightarrow s_4 \longrightarrow s_5$, augmentation : 2
$s_0 \longrightarrow s_2 \longrightarrow s_4 \longrightarrow s_3 \longrightarrow s_5$, augmentation : 2

Correction de l'exercice 2

Le flot de valeur 13 de s_0 à s_7 n'est pas maximal, il peut être optimisé en l'augmentant de 2 unités sur la chaîne suivante :
$s_0 \longrightarrow s_1 \longrightarrow s_3 \longrightarrow s_4 \longrightarrow s_5 \longrightarrow s_7$

On obtient donc : Flot max = Coupe min = 15.
Ensemble des sommets de la coupe : $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_6\}$.

Correction de l'exercice 3

Flot max = Coupe min = 15.
Ensemble des sommets de la coupe : $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8\}$.

Le résultat peut être obtenu en choisissant les chaînes augmentantes suivantes :
$s_0 \longrightarrow s_1 \longrightarrow s_4 \longrightarrow s_6 \longrightarrow s_9$, augmentation : 3
$s_0 \longrightarrow s_2 \longrightarrow s_1 \longrightarrow s_4 \longrightarrow s_6 \longrightarrow s_9$, augmentation : 3
$s_0 \longrightarrow s_2 \longrightarrow s_5 \longrightarrow s_8 \longrightarrow s_9$, augmentation : 2
$s_0 \longrightarrow s_3 \longrightarrow s_5 \longrightarrow s_7 \longrightarrow s_9$, augmentation : 4
$s_0 \longrightarrow s_3 \longrightarrow s_5 \longrightarrow s_4 \longrightarrow s_6 \longrightarrow s_9$, augmentation : 1
$s_0 \longrightarrow s_3 \longrightarrow s_5 \longrightarrow s_7 \longrightarrow s_6 \longrightarrow s_9$, augmentation : 2

Correction de l'exercice 4

Le flot de valeur 12 de s_0 à s_7 n'est pas maximal, il peut être optimisé en l'augmentant de 1 sur la chaîne suivante :
$s_0 \longrightarrow s_1 \longrightarrow s_4 \longrightarrow s_2 \longrightarrow s_3$
On obtient donc : Flot max = Coupe min = 13. Ensemble des sommets de la coupe :$\{s_0, s_1, s_5\}$.

Correction de l'exercice 5

Le flot de valeur 23 de s_0 à s_7 n'est pas maximal, il peut être optimisé en l'augmentant de 3 unités sur les chaînes suivantes :
$s_0 \longrightarrow s_1 \longrightarrow s_2 \longrightarrow s_5 \longrightarrow s_7$, augmentation : 2
$s_0 \longrightarrow s_3 \longrightarrow s_2 \longrightarrow s_5 \longrightarrow s_7$, augmentation : 1
On obtient donc : Flot max = Coupe min = 26.
Ensemble des sommets de la coupe : $\{s_0, s_1, s_3, s_4\}$.

Correction de l'exercice 6

Le flot de valeur 25 de s_0 à s_7 n'est pas maximal, il peut être optimisé en l'augmentant de 5 unités sur les chaînes suivantes :

$s_0 \longrightarrow s_1 \longrightarrow s_2 \longrightarrow s_5 \longrightarrow s_4 \longrightarrow s_7$, augmentation : 2

$s_0 \longrightarrow s_1 \longrightarrow s_2 \longrightarrow s_6 \longrightarrow s_7$, augmentation : 3

$s_0 \longrightarrow s_2 \longrightarrow s_6 \longrightarrow s_7$, augmentation : 2

On obtient donc : Flot max = Coupe min = 30.

Ensemble des sommets de la coupe :$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_5\}$.